Correction SIGMA n°2A

Exercice 1 - Inspiré ECRICOME 2018

Partie I

1. (a) Le calcul donne

$$A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I_3$$

(b) D'après la question précédente, on a

$$(A - 7I_3) \times A = -12I_3 \iff \frac{-1}{12}(A - 7I_3) \times A = I_3$$

Donc la matrice A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{-1}{12}(A - 7I_3).}$$

(c) On résout l'équation $X^2 - 7X + 12 = 0$ en calculant le discriminant $\Delta = 49 - 48 = 1$. L'équation a donc deux solutions

$$\boxed{X_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{7+1}{2} = 4.}$$

(d) On résout les équations

$$\begin{aligned} E_3 : (A - 3I_3)X = 0 \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y - 2z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ x - y + 2z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad x - y + 2z = 0 \\ &\iff x = y - 2z \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

On fait la même chose pour E_4 :

$$\begin{aligned} E_4 : (A - 4I_3)X = 0 \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - 2z &=& 4x \\ 3y &=& 4y \\ x - y + 5z &=& 4z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + 2z &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& -x \\ y &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix},z\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2. (a) On regarde si la matrice B est inversible On applique le pivot de Gauss :

$$\left.\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&3&-3\\-1&1&1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{array}{r}3L_1+L_2\to L_2\\L_1+L_3\to L_3\end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaitre 3 pivots dont deux sont nuls.

$\boxed{\text{La matrice } B \text{ n'est pas inversible.}}$

(b) On regarde si la matrice B est inversible On applique le pivot de Gauss :

$$\left.\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{array}{r}L_1+L_2\to L_2\\L_1+L_3\to L_3\end{array}$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad L_3\leftrightarrow L_2$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\quad\begin{array}{r}L_1-L_2\to L_1\\ \\L_3-2L_2\to L_3\end{array}$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\quad L_1-L_3\to L_1$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\quad -L_3\to L_3$$

(c) Le calcul donne

$$B\times P=\begin{pmatrix}3&0&-2\\-3&0&0\\-3&0&2\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{D_2=P^{-1}BP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

(d) En calculant, on obtient

$$\boxed{D_1 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Partie II

1. On injecte la définition de Y_n mais on commence par observer que

$$P^{-1}A = D_2P^{-1}, \qquad \text{et} \qquad P^{-1}B = D_1P^{-1}.$$

$$\begin{array}{rcl} Y_{n+2} & = & P^{-1}X_{n+2} \\ & = & P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\ & = & \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ & = & \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\ & = & \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n, \end{array}$$

ce qu'on voulait.

2. Comme

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la relation précédente donne immédiatement

$$Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 3a_{n+1} + \frac{1}{6} \times 3a_n \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 3b_{n+1} + 0 \\ c_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 4c_{n+1} + \frac{1}{6} \times 2c_n \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} & = & \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right. ,$$

ce qu'on nous demandait.

3. On obtient

$$\boxed{Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

4. On reconnait deux suites à récurrence linéaire d'ordre 2 ((a_n) et (c_n)) et pour b_n une suite géométrique de raison 1/2. On commence par celle-ci car c'est la plus immédiate à exprimer

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour les deux autres, on suit le protocole du cours, en commençant par introduire l'équation caractéristique. Pour (a_n), celle ci est

$$q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,
$$a_n = \lambda \times 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
où λ et μ sont à déterminer avec les conditions initiales. En injectant les valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve
$$a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$
Enfin, pour (c_n), l'équation caractéristique est
$$q^2 - \frac{2}{3}q - \frac{1}{3} = 0 \Longleftrightarrow q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{3}.$$
Ainsi,
$$c_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
et on applique la même méthode pour trouver λ et μ, pour obtenir
$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

5. Par définition
$$Y_n = P^{-1}X_n \Longleftrightarrow X_n = PY_n.$$
Ou encore
$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$
On veut seulement β_n, résultat de la deuxième ligne de P appliquée à Y_n, et on trouve
$$\beta_n = -a_n + b_n = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$
et on retrouve avec une certaine fierté l'égalité demandée.

6. Le programme demandé reprend la structure classique d'un programme permettant le calcul des termes d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

```
n = input("Entrez un nombre entier")
Xold=[3;0;-1]
Xnew=[3;0;-2]
A=[2,1,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
for i=2:n
    Aux=1/6*A*Xnew+1/6*B*Xold
    Xold=Xnew
    Xnew=Aux
end
disp(Xnew)
```

7. Pour chaque suite, le dernier terme représenté correspond à $n = 10$. Pour cette valeur de n, les termes de chaque suite sont proches de leurs limites. On voit que
$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} \sim 1.8, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \sim -1.3$$
Ainsi, la suite avec des croix $\times$ correspond à (α_n), celle avec des croix entourées à (β_n) et celle avec des losanges à (γ_n).

Exercice 2 - ECRICOME 2013 ECT

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

I- Étude du signe de g

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x}}$$

2. En développant la partie de droite, on obtient ;

$$\begin{aligned}(x-1)(ax^2+bx+c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c\end{aligned}$$

Ainsi $a = 1$, $b - a = 0$ donc $b = 1$ et $c = 1$. Donc

$$\boxed{a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1}$$

3. On résout pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}g'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 6x^2 - \frac{6}{x} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{6(x^3-1)}{x} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^3 - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0\end{aligned}$$

On résout alors $x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Ainsi cette équation n'a aucune solution.

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi l'équation } g'(x) = 0 \text{ n'admet qu'une unique solution } x = 1}$$

4. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty}$$

On a

$$g(x) = 2x^3\left(1 - \frac{3\ln(x)}{x^3} + \frac{3}{2x^3}\right)$$

et également

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{3\ln(x)}{x^3} + \frac{3}{2x^3}\right) = 1$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\ln(x)}{x^3} = 0$ par croissance comparée On conclut

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

5. On construit le tableau de variation g :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

6. Le minimum de la fonction g est 5 obtenu pour $x = 1$. Ainsi

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

II- Représentation graphique de f

1. La fonction $x \to 2x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \to x^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. La fonction $x \to 3\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$ en tant que somme et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On calcule la limite de la fonction f en 0, on sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{3\ln(x)}{x^2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas prolongeable par continuité.}}$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{3\dfrac{x^2}{x} - 6x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{2x^3}{x^3} + \frac{3 - 6\ln(x)}{x^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6\ln(x) + 3}{x^3} = \boxed{\frac{g(x)}{x^3}} \end{aligned}$$

4. D'après la question 2, on a

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty}$$

D'après les croissances comparées, on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln(x)}{x^2} = 0$$

On en déduit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

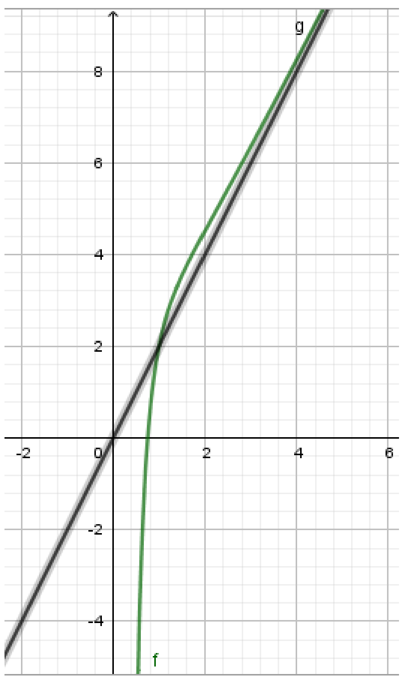
5. On dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

x	$0 \qquad +\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$-\infty \nearrow +\infty$

6. On a
$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{3\ln(x)}{x^3}$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$ par croissance comparée. Donc
$$\boxed{a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2}$$
et de même
$$f(x) - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^2}$$
$$\boxed{b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0.}$$

7. On note (D) la droite d'équation $y = 2x$. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$
$$\begin{aligned} f(x) - 2x \geq 0 &\iff \frac{3\ln(x)}{x^2} \geq 0 \\ &\iff \ln(x) \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est au dessus de } (D) \text{ sur }]1;+\infty[\text{ et en dessous sur }]0,1[.}$$

8. On sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (D).



III- Étude d'une équation.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(E_n) : f(x) = 2n$$

1. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. On a démontré
   — La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$.
   — La fonction f est strictement croissante.
   — $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$. (On notera plus tard $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
   Donc, d'après le théorème de la bijection, on sait que
   $$\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ admet une unique solution.}}$$
2. On calcule $f(x_n) = 2n$ par définition, $f(1) = 2$ et $f(n) = 2n + \dfrac{3\ln(n)}{n^2}$. Or $\dfrac{3\ln(n)}{n^2} > 0$ donc $f(1) \leq f(x_n) \leq f(n)$ On reprend le raisonnement précédent,
   — La fonction f est continue sur $[1; n]$.
   — $f(1) \leq 2n \leq f(n)$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe une solution à (E_n) (qui est nécessairement la même qu'à l'exercice 1) vérifiant
   $$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 1 \leq x_n \leq n.}$$
3. On part de
   $$\begin{aligned} f(x_n) = 2n &\iff 2x_n + \frac{3\ln(x_n)}{x_n^2} = 2n \\ &\iff \frac{x_n}{n} + \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2} = 1 \\ &\iff \boxed{1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}} \end{aligned}$$
4. On part de l'inégalité de la question 2
   $$1 \leq x_n \leq n \iff 0 \leq \ln(x_n) \leq \ln(n)$$
   On a également
   $$\frac{1}{x_n} \leq 1 \implies 0 \leq \frac{1}{x_n^2} \leq 1$$
   En combinant ces inégalités, on a
   $$0 \leq \frac{\ln(x_n)}{(x_n)^2} \leq \ln(n) \iff \boxed{0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}}$$
5. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée. Donc d'après le théorème des gendarmes et l'inégalité précédente on a
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} = 0$$
   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{x_n}{n} = 0$ et donc
   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n} = 1.}$$

Exercice 3 - ECRICOME 2017

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A - Études de cas particuliers

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et l'on tire une des n boules au hasard. Donc X_k suit une loi uniforme

$$\boxed{X_k \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])}$$

D'après le cours,

$$\boxed{E(X_k) = \frac{n+1}{2}.}$$

2. (a) Si l'on tire directement la boule numéroté n, alors $T_n = 1$. Si on ne tire que des boules numérotées 1 alors $T_n = n$. Tous les résultats intermédiaires sont possibles. Ainsi

$$\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

(b) On a vu que $T_n = 1$ si et seulement si la première boule tirée est la boule numéro n donc

$$\boxed{\mathcal{P}(T_n = 1) = \mathcal{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}.}$$

(c) Le seul moyen d'obtenir $T_n = n$, c'est d'obtenir les $n-1$ premières fois une boule numéro 1. Ainsi

$$\mathcal{P}(T_n = n) = \mathcal{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \ldots \cap X_{n-1} = 1) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} X_j = 1\right)$$

Or les évènements $(X_j = 1)_{j \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(T_n = n) &= \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{P}(X_j = 1)\\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n}\\ &\boxed{= \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

3. On a $T_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. Comme $P(T_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(T_2 = 2) = 1 - P(T_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$. On peut récapituler ces résultats dans un tableau :

k	1	2
$P(T_2=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. Dans cette question, $n=3$. On a $T_3(\Omega)=[\![1,3]\!]$. De plus, d'après les questions précédentes, $P(T_3=1)=\frac{1}{3}$ et $P(T_3=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$. On en déduit que

$$P(T_3=2)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

On peut récapituler ces résultats dans un tableau :

k	1	2	3
$P(T_3=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

On calcule l'espérance de T_3 et

$$\begin{aligned} E(T_3) &= 1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{9}+3\times\frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{3}+\frac{10}{9} \\ &\boxed{=\frac{16}{9}} \end{aligned}$$

Partie B - Étude de l'espérance dans le cas général

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La somme la plus faible est obtenu en ayant que des boules n° 1. La somme vaut alors k. La somme la plus forte obtenue est celle ou l'on a que des boules n. Ainsi

$$\boxed{S_k(\Omega) = [\![k; nk]\!].}$$

2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) On a

$$\boxed{S_{k+1} = S_k + X_{k+1}.}$$

   (b) On utilise le système complet d'évènement $(S_k = j)$ pour $j \in [\![k; nk]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a pour $i \in [\![k+1, n]\!]$,

$$\mathcal{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} \mathcal{P}(S_{k+1} = i \cap S_k = j)$$

Or pour $j \in [\![i, nk]\!]$, $(S_{k+1} = i) \cap (S_k = j) = \emptyset$. En effet, si l'on a une somme au bout de k tirages égale à $j \geq i$ alors il est impossible d'avoir une somme égale à i au $k+1$-ème tirage. On a donc

$$\mathcal{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathcal{P}(S_{k+1} = i \cap S_k = j)$$

De plus, pour $j \in [\![k, i-1]\!]$, on a

$$(S_{k+1} = i) \cap (S_k = j) = (X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j)$$

En effet, si au $k$ème tirage, la somme des numéros tirés est j alors, il faut tirer la boule n° $i - j$ au $k+1$-ème tirage. Ainsi, l'équation devient

$$\mathcal{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathcal{P}(X_{k+1} = i - j \cap S_k = j)$$

Or les évènements $X_{k+1} = i - j$ et $S_k = j$ sont indépendants donc

$$\mathcal{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathcal{P}(X_{k+1} = i - j) \times \mathcal{P}(S_k = j)$$
$$\boxed{= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathcal{P}(S_k = j)}$$

3. (a) D'après le cours, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.}$$

   (b) On calcule pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}$$

On reconnait une somme télescopique et donc

$$\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k}$$
$$\boxed{= \binom{i-1}{k}}$$

On rappelle que $\binom{k-1}{k} = 0$ puisque $k-1<k$.

(c) Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$« \ \forall i \in [\![k,n]\!],\ \mathcal{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \ ».$$

- **Initialisation :** On vérifie $\mathcal{H}_1$. On vérifie que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathcal{P}(S_1 = i) = \frac{1}{n}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n}$$

Or $S_1 = X_1$ et X_1 suit une loi uniforme donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathcal{P}(X_1 = i) = \frac{1}{n}$$

et ainsi la propriété $\mathcal{H}_1$ est vraie.

- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathcal{H}_k$ est vraie pour un certain rang $k \in [\![1,n-1]\!]$. On va alors montrer S_{k+1}. Pour tout $i \in [\![k+1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathcal{P}(S_k = j) \quad \text{d'après question 2b} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \quad \text{hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{i-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} \quad \text{d'après question 3b}
\end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathcal{H}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\boxed{« \ \forall i \in [\![k,n]\!],\ \mathcal{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \ ».}$$

4. (a) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. L'évènement $T_n > k$ signifie que somme des numéros obtenus dépasse n après le k-ème tirage. L'évènement $S_k < n-1$ signifie que la somme des k premiers tirages est inférieur ou égal à $n-1$. Ces deux évènements sont les mêmes. Donc

$$\boxed{(T_n > k) = (S_k \leq n-1)}$$

(b) On en déduit que $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(T_n > k) &= \mathcal{P}(S_k \leq n-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}(S_k = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} \\
&\boxed{= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.}
\end{aligned}$$

5. En utilisant la définition de l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathcal{P}(T_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \left(\mathcal{P}(T_n \geq k) - \mathcal{P}(T_n \geq k+1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathcal{P}(T_n \geq k) - k\mathcal{P}(T_n \geq k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathcal{P}(T_n \geq k) - (k+1)\mathcal{P}(T_n \geq k+1) + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(T_n \geq k+1) \\
&= \mathcal{P}(T_n \geq 1) - (n+1)\mathcal{P}(T_n \geq n+1) + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(T_n > k) \\
&= 1 - 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}(T_n > k) + \mathcal{P}(T_n > n) \\
&= P(T_n > 0) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}(T_n > k) + 0 \\
&\boxed{= \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}(T_n > k)}
\end{aligned}$$

On obtient alors en utilisant le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-1-k} \\
&\boxed{= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}
\end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} &= e^{(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \exp\left(\frac{n-1}{n} \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)
\end{aligned}$$

Or d'après les croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

et en factorisant,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

Donc par composée de limite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = e}$$

Partie C - Étude Scilab

1. On rappelle que la fonction $rand()$ en Scilab permet d'obtenir un nombre réel entre 0 et 1. Que permet la commande :

   ```
   X = ceil(n*rand())
   ```

   Cette commande permet d'obtenir un nombre entier aléatoire entre 1 et n et modélise ainsi une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On considère désormais que l'expression précédente donne une modélisation de la variable aléatoire X_k.

2. Script Scilab

   ```
   n = input("Entrer un nombre n")
   S = 0
   for k =1:n
       X = ceil(n*rand())
       S = S + X
   end
   disp(S)
   ```

3. On modifie le Script Scilab précédent pour qu'il affiche également une modélisation de T_n.

   ```
   n = input("Entrer un nombre n")
   S = 0
   for k =1:n
       X = ceil(n*rand())
       S = S + X
       if S >= n then
           T = k
   end
   disp(S)
   disp(T)
   ```